

Математическое моделирование комбинированного нагружения тонкой пластины

Лемина О. С., email: mail.olga.shipilova@gmail.com

Меджидов Р. Г., email: ihatedamnmails@gmail.com

Воронежский государственный университет

***Аннотация.** Тонкая пластина из упругопластического материала подвергается тепловому нагружению в одном направлении. Значение предела пластичности зависит от температуры. Изложена процедура определения напряженного и деформированного состояния пластины для любых условий, как кусочно-линейных, так и нелинейных. Показано, что предельное состояние возникает только в случае комбинированной нагрузки: тепловой и силовой.*

***Ключевые слова:** тонкая пластина, упругопластическое тело, тепловое нагружение, закон пластического деформирования, кусочно-линейные функции пластичности, гладкие функции пластичности.*

Введение

Тонкие пластины, сплошные диски, кольцевые диски и диски с включениями широко используются в инженерной практике. Разные подходы математического моделирования поведения таких объектов, являются составной частью многих монографий [1–3] и рассмотрены в многочисленных журнальных публикациях, например, [4–6]. Влияние теплового воздействия на тонкий полный упругопластический диск при выборе условия пластичности Мизеса, помещенный в жесткий цилиндрический контейнер рассмотрено в [7]. При действии двух независимых параметров нагружения возможно возникновение двух различных механизмов пластического коллапса [8]. В работе [9] выполнено численно-аналитическое решение одномерной задачи теории температурных напряжений об эволюции плоских напряженных состояний в условиях нагрева и последующего остывания круглой пластины, изготовленной из упругопластического материала. Решение задачи о тонкой упругой пластине, когда тепловое воздействие приводит неоднородному полю напряжений по одной координате, ортогональной декартовой системы координат дано в [1]. В работах [10, 11] рассмотрено тепловое нагружение упругопластической тонкой пластины.

1. Постановка задачи

Рассматривается тонкая пластина из упругопластического материала. Выбирается декартова система координат xyz . Для тонкой пластины принимается приближение плоского напряженного состояния: $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$. В направлении оси $0y$ пластина считается бесконечной. В направлении оси $0x$ пластина имеет ширину $2a$. Тепловое воздействие приводит неоднородному полю напряжений по координате y . На кромках пластины $x = \pm a$ действует силовое воздействие $\sigma_{xx}|_{x=\pm a} = -p$. Значение предела пластичности зависит от температуры.

2. Анализ задачи

Если в направлении $0y$ пластина бесконечная, то любая плоскость $y = const$ будет плоскостью симметрии, из чего следует, что компонента вектора перемещений $u_y = 0$. Если в направлении $0y$ пластина имеет конечную ширину, можно принять что перемещения кромок пластины в направлении $0y$ равны нулю. Компонента напряжений σ_{xx} может принимать только фиксированное значение, которое определяется из граничных условий $|\sigma_{xx}| = p$ на кромках $x = \pm a$ пластины. При этом растягивающие или сжимающие напряжения σ_{xx} не могут принимать любые значения в силу ограничений устанавливаемых условием пластичности.

3. Выбор математической модели

С учетом постановки задачи выбираемая математическая модель упругопластического состояния тонкой пластины включает уравнения, приводимые ниже.

Уравнение равновесия

$$\sigma_{xx,x} = 0,$$

из которого следует $\sigma_{xx} = p$, где p – усилие на кромках $x = \pm a$ пластины.

Соотношения закона Дюамея-Неймана для упругих деформаций

$$\begin{aligned} E \varepsilon_{xx}^e &= p - \nu \sigma_{yy} + E \alpha T, \\ E \varepsilon_{yy}^e &= \sigma_{yy} - \nu p + E \alpha T, \\ E \varepsilon_{zz}^e &= -\nu (p + \sigma_{yy}) + E \alpha T. \end{aligned} \tag{1}$$

В области упругого состояния, если нет начальных остаточных деформаций, полные деформации равны упругим. Тогда из равенства $\varepsilon_{yy} = 0$ следует, что $\sigma_{yy} = \nu p - E \alpha T$, поэтому

$$E \varepsilon_{xx} = (1 - \nu^2) p + (1 + \nu) E \alpha T,$$

$$E \varepsilon_{zz} = (1 + \nu)(\nu E \alpha T - \nu p).$$

Для полных деформаций

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

где u_x , u_z — компоненты вектора перемещений. Перемещений в упругой области определяются из решений двух уравнений

$$\frac{du_x}{dx} = (1 - \nu^2) p + (1 + \nu) E \alpha T,$$

$$\frac{du_z}{dz} = (1 + \nu)(\nu E \alpha T - \nu p).$$

Из условия пластичности

$$F(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz})|_{\sigma_{xx}=p, \sigma_{zz}=0} = f(\sigma_{yy}) = k,$$

находим, что в пластической области $\sigma_{yy} = f^{-1}(k)$.

Если k — предел пластичности на одноосное растяжение, то $\sigma_{yy} = k$.

Если принимается ассоциированный закон пластического течения, то в инкрементальной форме

$$\frac{d\varepsilon_{xx}^p}{\partial F / \partial \sigma_{xx}} = \frac{d\varepsilon_{yy}^p}{\partial F / \partial \sigma_{yy}} = \frac{d\varepsilon_{zz}^p}{\partial F / \partial \sigma_{zz}} \quad (2)$$

Соотношения (2) интегрируются в некоторых случаях. Например, для кусочно-линейных функций пластичности

$$F_i = \max\{\alpha_i \sigma_{xx} + \beta_i \sigma_{yy} + \gamma_i \sigma_{zz}\}, \quad i = 1 \div 3n, \quad n \in N.$$

В этом случае

$$\frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{xx}} = \alpha_i, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{yy}} = \beta_i, \quad \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{zz}} = \gamma_i,$$

поэтому, интегрируя (2), получим

$$\frac{\varepsilon_{xx}^p}{\alpha_i} = \frac{\varepsilon_{yy}^p}{\beta_i} = \frac{\varepsilon_{zz}^p}{\gamma_i}$$

Соотношения (2) также интегрируются, если поле температур стационарное. В общем случае соотношения (2) не интегрируются. В таких случаях будем использовать соотношения ассоциированного закона пластического деформирования [5, 6]

$$\frac{\varepsilon_{xx}^p}{\partial F / \partial \sigma_{xx}} = \frac{\varepsilon_{yy}^p}{\partial F / \partial \sigma_{yy}} = \frac{\varepsilon_{zz}^p}{\partial F / \partial \sigma_{zz}}. \quad (3)$$

Для аддитивной связи полных, упругих и пластических деформаций

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{xx}^p, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^e + \varepsilon_{yy}^p, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p. \quad (4)$$

Упругие деформации в пластической области определяются по формулам (1). Из (3), (4), учитывая, что $\varepsilon_{yy} = 0$, следуют уравнения

$$\varepsilon_{xx}^p = -\frac{F_x}{F_y}(\sigma_{yy} - \nu p + E\alpha T),$$

$$\varepsilon_{zz}^p = -\frac{F_z}{F_y}(\sigma_{yy} - \nu p + E\alpha T),$$

где $F_x = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{yy}} \Big|_{\sigma_{xx}=p, \sigma_{zz}=0}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{yy}} \Big|_{\sigma_{xx}=p, \sigma_{zz}=0}$, $F_z = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{zz}} \Big|_{\sigma_{xx}=p, \sigma_{zz}=0}$.

Перемещения в пластической области определяются из решения уравнения

$$\frac{du_x}{dx} = p - \nu \sigma_{yy} + E\alpha T - \frac{F_x}{F_y}(\sigma_{yy} - \nu p + E\alpha T).$$

Если нет температурного воздействия, то условие Треска допускает напряжения $|\sigma_{xx}| \leq k$ (k предел пластичности при одноосном растяжении). Если на границах $x = \pm a$ давление $|p| = k$, то пластина переходит в предельное состояние. Экспериментальные данные [2] показывают, что предел пластичности при увеличении температуры для большинства материалов всегда уменьшается. Приняв это, приходим к тому, что дальнейшее тепловое нагружение пластины, когда $|p| = k$ невозможно: в плоскости $y = const$, где температура начинает увеличиваться будет происходить неограниченное увеличение пластических деформаций. Нагрев пластины приводит к появлению

сжимающих напряжений $\sigma_{yy} < 0$ (рассматриваем случай, когда перемещений вдоль оси $0y$ нет) и к зарождению пластической области, когда $|p| < k$.

При увеличении температуры предел пластичности уменьшается и кривые пластичности «сжимаются» и при температуре, когда предел пластичности $k \rightarrow 0$, стягиваются в точку (рис.1).

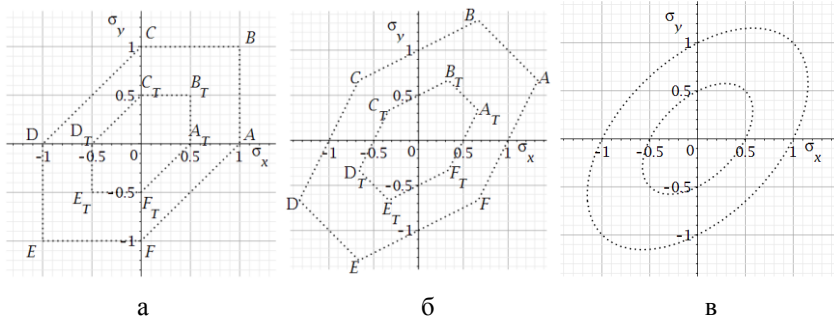


Рис. 1. Шестиугольники условия пластичности Треска (а), Ишлинского-Ивлева (б) и кривые Мизеса (в) в плоскости $\sigma_z = 0$

Для шестиугольников $ABCDEF$ при начальной температуре безразмерный предел пластичности на одноосное растяжение $k = 1$. Для шестиугольников $A_T B_T C_T D_T E_T F_T$ предел пластичности $k(T) < 1$.

Для условия пластичности Треска, когда $0 < p < k$ в пластической области реализуется режим $E_T F_T$ (рис. 1.а). Для точек пластины с разной температурой кривые пластичности разные. Если вдоль оси $0x$ напряжения растягивающие ($-k < p < 0$), то реализуется режим $F_T A_T$. Сингулярный режим F_T , реализуется, когда $p = 0$. Если не реализуется комбинированное нагружение пластины, при котором изменяется значение p , то в пластической области реализуется один режим.

Для условия пластичности Ишлинского-Ивлева пластина без теплового воздействия переходит в предельное состояние, если внешнее растягивающее или сжимающее воздействие $|p| = 4k/3$ (режимы A , D). Если значение параметра $|p|$ меньше предельного, то при тепловом нагружении могут реализоваться режимы $D_T E_T$, $E_T F_T$ и часть режимов $C_T D_T$, $A_T F_T$ в полуплоскости $\sigma_{yy} \leq 0$. Когда

рассматривается тепловое нагружение при фиксированном силовом воздействии, к разным частям пластины могут реализовываться разные режимы для кусочно-гладких функций пластичности [10, 11].

Кусочно-линейные функции пластичности можно с необходимой точностью аппроксимировать гладкими функциями пластичности. Так шестиугольник Треска можно аппроксимировать кривой Херши-Хосфорда [6], которая в частом случае совпадает с эллипсом пластичности Мизеса.

В качестве примера рассмотрим случай, когда температура в пластине изменяется по линейному закону. Для функции пластичности

$$F = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^6 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^6 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^6, \quad \sigma_{xx} = -p, \quad \sigma_{zz} = 0$$

распределение напряжений

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2} \left(p - \sqrt{2N - 5p^2 + 10p^2 / N} \right),$$

$$N = \left(2k - 13p^6 + 2\sqrt{11p^{12} - 13kp^6 + k^2} \right)^{1/3}$$

На рис. 2 приведен график изменения эквивалентного напряжения. Нелинейность кривой σ_{eq} в пластической области обусловлен выбором функции пластичности.

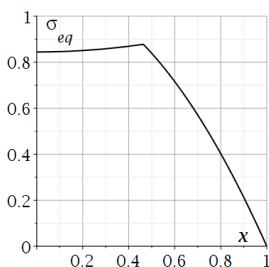


Рис. 2. $T_a = 100$, $T_b = 0$, $b = 1$, $\nu = 0.25$, $\chi = 0.0017$, $\alpha E = 0.012$

Выводы

Задача о термопластическом состоянии пластины имеет аналитическое решение для кусочно-линейных функций пластичности. Однако, выбор таких функций приводит к разрыву пластических деформаций при выполнении сингулярных режимов. Выбор гладких функций пластичности приводит к непрерывности полей деформаций.

Список литературы

1. Timoshenko S. P. Theory of elasticity / S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 506 p.
2. Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – Москва: Физматлит, 1963. – С. 252.
3. Chakrabarty J. Theory of Plasticity / J. Chakrabarty. – Oxford : Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. – 882 p.
4. Абашкин, Е. Е. Условие пластичности максимальных приведенных касательных напряжений в качестве средства расчетов эволюции плоских напряженных состояний / Е. Е. Абашкин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Серия: Науки о природе и технике. – 2018. – № II-1(34). – С. 51–62.
5. Aleksandrova N. N., Artemov M. A., Baranovskii E. S., Shashkin A. I. On stress/strain state in a rotating disk // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. Article ID 012001, <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012001>
6. Semka E. V., Artemov M. A., Babkina Y. N., Baranovskii E. S., Shashkin A. I. Mathematical modeling of rotating disk states // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1479. Article ID 012122, <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012122>
7. Александров С. Е. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние в тонком полом диске / С. Е. Александров, Е. А. Лямина, О. В. Новожилова // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2013. – № 3. – С. 43-48.
8. Alexandrov S. Plastic collapse mechanisms in thin disks subject to thermo mechanical loading / S. Alexandrov, P. D. Chinh // In: Proc. Int. Conf. Advances in Computational Mechanics (ACOME 2012), Tong N.T., Hung N.X., Trung N.T., Thanh C.D. (Eds.), Ho Chi Minh City (Vietnam), 14–16 August 2012. P. 261–270.
9. Буренина А.А. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средство расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений / А. А. Буренина , А. В. Ткачева // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 6.- С.40-46.
10. Каинг, М. Температурные напряжения пластины / М. Каинг, А.В. Ткачева // Вестник ЧГПУ. – 2016. – №4(30). – С. 24-32
11. Каинг, М. К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах / М. Каинг, А.В. Ткачева // Дальневосточный математический журнал.-2018. – Т.№2. – С.131-146.